



Proposition de méthodes et modèles eulériens pour
les problèmes à interfaces entre fluides
compressibles en présence de transfert de chaleur
Some models and Eulerian methods for interface
problems between compressible fluids with heat transfer

J. Massoni ^{a,b}, R. Saurel ^{a,b,*}, B. Nkonga ^c, R. Abgrall ^c

^a *IUSTI, UMR CNRS 6595, Université Aix Marseille I, Technopôle de Château Gombert, 5 rue E. Fermi,
13453 Marseille Cedex 13, France*

^b *Projet SMASH, INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, 06902 Sophia Antipolis, France*

^c *Département de Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Liberation, Talence Cedex, France*

Reçu le 20 novembre 2000; reçu en forme révisée le 23 mai 2001

Resumé

On évalue différentes formulations eulériennes aptes au traitement de problèmes à interfaces entre fluides compressibles. La difficulté dans ce type de problème réside dans le calcul des variables thermodynamiques dans les zones de diffusion numérique produites aux interfaces. En effet, tout schéma eulérien diffuse artificiellement les discontinuités de contact (ou interfaces) et produit donc un mélange artificiel pour lequel la détermination de l'état thermodynamique est difficile. De plus, lorsque l'état thermodynamique est mal déterminé, les méthodes échouent très rapidement en raison de pressions négatives ou d'arguments négatifs dans le calcul de la vitesse du son. Les modèles et les méthodes de résolution qui sont évaluées n'ont jamais été examinées pour le calcul de la température aux interfaces. L'examen des défauts et avantages de ces formulations nous conduit à en rejeter certaines et à en proposer une nouvelle, très efficace. Ce nouveau modèle est accompagné de son schéma numérique. On présente ensuite le traitement des transferts diffusifs aux interfaces, puis un exemple de résolution en deux dimensions d'espace. L'évaluation est effectuée sur une série de problèmes possédant des solutions exactes. © 2002 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Abstract

We examine various formulations for the numerical resolution of interface problems with compressible fluids. The difficulty with this type of problem resides in the computation of the thermodynamic variables inside the numerical diffusion zone at the interfaces. Indeed, any Eulerian numerical scheme produces artificial diffusion zones at the interfaces and produces consequently an artificial mixture for which the determination of thermodynamic variables is difficult. An inaccuracy in their determination induces failure of the computation (negative pressure or negative argument in the sound speed computation). Moreover, these models and methods have never been examined for the temperature computation. The examination of their drawbacks results in the rejection of some of them and to the proposition of a very efficient new model. This model is presented with its own numerical method. We then explain the

* Corresponding author.

E-mail addresses: jacques@iusti.univ-mrs.fr (J. Massoni), richard@iusti.univ-mrs.fr (R. Saurel), nkonga@math.u-bordeaux.fr (B. Nkonga), abgrall@math.u-bordeaux.fr (R. Abgrall).

way to solve for heat diffusion at the interface and give a computational example in two dimensions. The evaluation of these models is achieved over a series of problems with exact solutions. © 2002 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Le problème type qui est visé pour la modélisation et la simulation numérique est schématisé sur la Fig. 1. Il consiste à étudier le comportement d'une couche de matériau dense contenant un matériau léger soumis à un fort rayonnement. L'ensemble est placé dans un autre matériau léger, un fluide ambiant.

Dans ces conditions, suite à l'absorption d'énergie, une couche du matériau dense se dilate fortement et simultanément une forte onde de choc se propage dans le matériau. Il s'ensuit des propagations d'ondes multidimensionnelles qui interagissent avec les différentes interfaces. Ces interfaces présentant une certaine courbure locale et les phénomènes étant hautement non-linéaires, des instabilités hydrodynamiques du type Richtmyer–Meshkov apparaissent sur les interfaces internes et externes.

Dans la suite de ce document, nous considérerons uniquement le problème d'hydrodynamique associé à cette configuration. En effet, les transferts radiatifs et les différents phénomènes réactifs ne seront pas considérés.

Ainsi, en se focalisant sur le problème d'hydrodynamique et en oubliant momentanément les problèmes de discrétisation qui apparaissent aux interfaces et qui nécessiteront l'introduction de formulations adaptées, la formulation mathématique de base de ce problème se résume aux équations d'Euler avec diffusion de la chaleur. Ce type de modèle se rencontre aussi bien dans l'étude de la dynamique des fronts de flamme [7], que pour la dynamique de l'ablation de fronts par laser [10,17]. Les équations s'écrivent:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(F(W) - F_{\text{th}}(W)) = S(x), \quad (1)$$

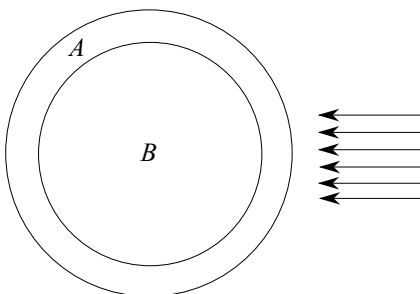


Fig. 1. Schéma du problème.

où $U = (\rho, \rho\vec{u}, \rho E)^T$ est le vecteur des variables conservées, F est le flux eulérien, F_{th} est le flux thermique obtenu à partir de la loi de Fourier $F_{\text{th}} = (0, \vec{0}, \lambda \nabla T)$ et S le terme source dû au rayonnement. Dans le reste de cette étude, ce terme source sera pris égal à zéro puisqu'aucun couplage radiatif n'est considéré. L'énergie totale est définie par $E = e + 1/2\vec{u} \cdot \vec{u}$. La loi d'état de chaque matériau fournit la pression $P = P(\rho, e)$ en fonction d'un certain nombre de constantes différentes d'un matériau à l'autre.

Comme d'habitude dans ce type de problème, la première difficulté réside dans la non-linéarité des ondes, couplée au fait que les lois d'état des matériaux sont très différentes de part et d'autre des interfaces. Ce type de difficulté a déjà été considéré au travers de trois formulations différentes dans Abgrall [1], Saurel et Abgrall [18,19], Saurel et LeMetayer [20], Abgrall et al. [3], et Abgrall et Karni [2].

Une nouvelle difficulté apparaît ici en raison du front d'ablation. Sur ce front, l'hydrodynamique est fortement couplée à la diffusion de la chaleur et au dépôt d'énergie rayonnée. Ces phénomènes sont fortement liés à une variable thermodynamique qui ne jouait pas un grand rôle dans les travaux précités: la température. Nous allons donc nous focaliser dans un premier temps sur une évaluation des différentes méthodes présentées dans les références précédentes pour la détermination de la température, en particulier aux interfaces, en vue de modéliser les transferts diffusifs. En effet, même si le dépôt d'énergie ne se fait pas exactement sur une interface mais légèrement à l'intérieur de l'un des fluides, les éventuelles erreurs numériques dans le calcul de la température aux interfaces ne doivent pas venir polluer le reste de l'écoulement et de la solution.

Le présent document est organisé ainsi. Dans un premier temps nous effectuons quelques rappels de thermodynamique concernant les lois d'état des matériaux qui seront utilisées ici. Ensuite nous présentons les différents modèles mathématiques assortis de leur schéma de discrétisation pour le calcul de toutes les variables de l'écoulement (y compris la température). Ceci nous permettra de statuer sur certains modèles et d'en proposer de nouveaux.

Ceci étant réalisé, on retient le modèle le mieux adapté au problème pour lequel on va traiter les aspects diffusifs.

Signalons que nous nous restreindrons à une mise en œuvre 1D de ces modèles. De même, nous considérerons uniquement des stratégies de résolution strictement eulériennes, conformément à ce qui a été développé dans

les références précitées. Les autres type de méthodes envisageables sont partiellement discutées dans Saurel et Abgrall [18], Saurel et LeMetayer [20] et Benson [6].

Les méthodes seront toujours exposées en une dimension et à l'ordre 1, sachant que les ingrédients nécessaires aux extensions en multidimension et à des ordres supérieurs sont données dans les références précitées.

Après le rappel de thermodynamique qui suit, nous allons présenter une suite de modèles en commençant par un modèle que nous avons qualifié de minimum, puis nous examinerons un modèle multiphasique très complet. Les enseignements tirés de ces deux modèles nous permettront de proposer un modèle multiphasique réduit d'une résolution plus aisée et d'une précision intéressante. Nous examinerons ensuite une stratégie de résolution différente, basée sur une méthode à deux flux, que nous appliquerons à des modèles assez semblables.

2. Thermodynamique et lois d'état

Chaque matériau est supposé obéir à la loi d'état du "gaz raide". Cette loi d'état est efficace pour reproduire le comportement hydrodynamique de gaz, liquides et solides compressibles.

Pour spécifier complètement un état thermodynamique il faut disposer de deux lois d'état (thermique et calorique) ou de l'expression de l'énergie libre. On utilisera ici la loi d'état calorique (qui permet le calcul de la pression) et la loi d'état thermique (qui permet le calcul de la température). La première s'écrit:

$$e = (P + \gamma P_\infty) / (\rho(\gamma - 1)) + e_0 - (P_0 + \gamma P_\infty) / (\rho_0(\gamma - 1)). \quad (2)$$

Les constantes γ et P_∞ sont très différentes d'un matériau à l'autre. Les autres constantes: P_0 , ρ_0 et e_0 représentent respectivement la pression, la densité et l'énergie du matériau dans les conditions standard. La seconde loi d'état s'écrit:

$$T = \frac{P + P_\infty - (\rho/\rho_0)^\gamma (P_0 + P_\infty)}{\rho(\gamma - 1)C_v} + T_0(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}. \quad (3)$$

La capacité calorifique à volume constant de chaque matériau est supposée constante (mais différente d'un matériau à l'autre) et est notée C_v .

Lorsque les constantes P_0 et P_∞ sont prises égales à zéro, on retrouve aisément la formulation gaz parfait.

Ces équations d'état peuvent être écrites sous la formulation Mie–Gruneisen qui est à la fois plus générale et plus pratique:

$$e(\rho, T) = e_j(\rho) + C_v T \quad (4)$$

et

$$P(\rho, T) = P_j(\rho) + \rho \Gamma C_v T. \quad (5)$$

Par combinaison des deux lois d'état on obtient aussi:

$$P(\rho, e) = P_j(\rho) + \rho \Gamma (e - e_j(\rho)).$$

Pour la formulation stiffened gas, les différentes fonctions s'écrivent:

$$e_j(\rho) = c_0 + P_\infty / \rho,$$

$$P_j(\rho) = -P_\infty,$$

avec

$$c_0 = e_0 - (P_0 + \gamma P_\infty) / (\rho_0(\gamma - 1))$$

et

$$\Gamma = \gamma - 1.$$

La thermodynamique de chaque matériau pur est ainsi complètement déterminée. *La difficulté réside maintenant dans le calcul des mêmes variables thermodynamiques dans les zones de diffusion numérique produites aux interfaces. En effet, tout schéma eulérien diffuse artificiellement les discontinuités de contact (ou interfaces) et produit donc un mélange artificiel pour lequel la détermination de l'état thermodynamique est difficile.*

Pour ce faire, nous allons examiner plusieurs modèles d'écoulements.

3. Modèle minimum

Ce premier modèle, comme les modèles suivants, est d'abord évalué en l'absence de diffusion de la chaleur: on se focalise sur le calcul des variables cinématiques et thermodynamiques de l'écoulement.

La description complète du "modèle minimum" et de la méthode de résolution peut être consultée dans une série d'articles par Abgrall [1], Saurel et Abgrall [18] et Abgrall et al. [3]. Nous ne reprenons ici que les ingrédients essentiels et examinons le problème du calcul de la température.

Afin d'alléger la présentation, on considère que chaque fluide est régi par la loi d'état des gaz parfaits: $P = (\gamma - 1)\rho e$ et $e = C_v T$. Tous les calculs peuvent être repris sans difficulté en utilisant la formulation "stiffened gas".

Les paramètres des équations d'état étant discontinus d'un matériau à l'autre et ces derniers étant mobiles, les paramètres thermodynamiques doivent être considérés comme des fonctions de l'espace et du temps: $\gamma = \gamma(x, t)$ et $C_v = C_v(x, t)$. Le modèle à résoudre est donc constitué des équations d'Euler et de deux équations traduisant l'évolution des phases. En une dimension il s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial C_v}{\partial t} + u \frac{\partial C_v}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Les deux dernières équations sont exactes lorsque les opérateurs de dérivation sont continus, comme c'est le cas dans l'écriture du système (6). Nous allons voir par contre que la traduction de ces équations en terme d'opérateurs discrets n'a rien d'évident.

La partie conservative de ce modèle, constituée des trois premières équations, va être discrétisée par le schéma de Godunov et al. [13] alors que le schéma pour la partie non-conservative est à déterminer. Notons $W = (\rho, \rho u, \rho E)^T$ le vecteur des variables conservatives. Le schéma de Godunov s'écrit:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda(F_+^* - F_-^*), \tag{7}$$

où U_i est la valeur moyenne des inconnues dans la maille, F^* le flux solution du problème de Riemann exact et le rapport du pas de temps et du pas d'espace est noté $\lambda = \Delta t / \Delta x$. Les exposants n et $n + 1$ désignent deux instants successifs, les indices $+$ et $-$ sont relatifs aux bords de maille droit et gauche d'une cellule de calcul.

La méthode est exposée dans le cadre du schéma de Godunov basé sur un solveur de Riemann exact pour les équations d'Euler fermées par l'équation d'état stiffened gas, mais beaucoup d'autres solveurs peuvent être employés. L'idée de base de cette méthode est de déterminer le schéma de discrétisation des équations non-conservatives en s'assurant que les conditions d'interface vont être satisfaites. Pour cela, on se place sur une situation simplifiée où initialement l'écoulement évolue dans un champ de pression et de vitesse uniformes dans l'espace. Par contre, la densité, l'énergie interne, l'entropie et les paramètres des équations d'état sont discontinus au travers de l'interface. Dans ces conditions, un tel écoulement ne doit pas évoluer en pression ni en vitesse au cours du temps.

En présentant cette idée autrement, on sait que sur les mailles proches de l'interface (Fig. 2), l'égalité des vitesses et des pressions doit être satisfaite puisqu'il s'agit des conditions d'interface. On veut s'assurer que le solveur d'écoulement est au moins capable de maintenir ce type de conditions si elles sont satisfaites initialement.

Successivement, nous allons observer les différentes opérations effectuées par le schéma de Godunov pour chaque équation, dans ce cas particulier d'écoulement.

$u_{i-1} = u_i = u_{i+1} = u$ et $P_{i-1} = P_i = P_{i+1} = P$
 mais
 $\rho_{i-1} \neq \rho_i \neq \rho_{i+1}; e_{i-1} \neq e_i \neq e_{i+1}; \gamma_{i-1} = \gamma_i \neq \gamma_{i+1}$ etc.

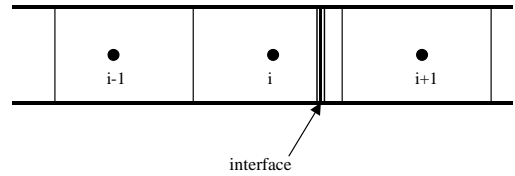


Fig. 2. Cellules de calcul autour de l'interface. Les champs de vitesse et de pression sont supposés uniformes (en accord avec les conditions d'interface) mais les autres variables sont discontinues.

L'équation de conservation de la masse discrète s'écrit:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \lambda(\rho u_+^* - \rho u_-^*)$$

ce qui devient, compte tenu du champ uniforme de vitesse:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \lambda u(\rho_+^* - \rho_-^*).$$

On applique le même type de raisonnement à l'équation du mouvement en tenant compte des conditions d'uniformité de vitesse et de pression. On obtient alors:

$$u_i^{n+1} = u_i^n.$$

Ce résultat est celui qui était attendu. Il signifie que la vitesse n'aura aucune évolution. On examine maintenant l'équation d'énergie. Après quelques simplifications on obtient:

$$\rho e_i^{n+1} = \rho e_i^n - \lambda u(\rho e_+^* - \rho e_-^*).$$

En utilisant maintenant l'équation d'état calorique, chaque produit de la densité par l'énergie interne s'écrit: $\rho e = P / (\gamma - 1)$. En introduisant la variable $\beta = 1 / (\gamma - 1)$ on obtient:

$$\beta P_i^{n+1} = \beta P_i^n - \lambda u(\beta P_+^* - \beta P_-^*).$$

Cette dernière équation indique que pour que la pression reste uniforme à l'instant suivant, il est nécessaire que la variable β soit obtenue par la formule

$$\beta_i^{n+1} = \beta_i^n - \lambda u(\beta_+^* - \beta_-^*), \tag{8}$$

qui est en fait une discrétisation de l'équation

$$\frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial t} + u \frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial x} = 0$$

équivalente à

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + u \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

Ce schéma a montré son efficacité pour la restitution des conditions d'interface y compris pour des situations où l'écoulement n'est pas uniforme en pression ni en vitesse initialement. Il a été utilisé pour des lois d'état diverses [22], des problèmes de dynamique des chocs et interfaces et des problèmes de détonique et d'écoulements réactifs [3]. Dans cette dernière référence, la méthode est généralisée aux maillages non-structurés et une nouvelle discrétisation de l'équation

$$\frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial t} + u \frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial x} = 0$$

est proposée:

$$\beta_i^{n+1} = \beta_i^n - \lambda((u\beta)_+^* - (u\beta)_-^* + \beta_i^n(u_+^* - u_-^*)), \quad (9)$$

qui reproduit le schéma (8) dans le cas d'un écoulement à vitesse uniforme. On peut remarquer que cette formule n'est rien d'autre que le schéma de Godunov pour une équation d'advection.

Un meilleur comportement de la solution a été observé avec ce schéma en régime instationnaire. Ainsi, le schéma complet est composé de la relation (7) pour la partie conservative du système, et du schéma (9) pour la partie non-conservative. Dans le schéma (9), la fonction β doit être judicieusement choisie: $\beta = 1/(\gamma - 1)$ pour la loi d'état des gaz parfaits.

Nous allons maintenant examiner sa capacité à déterminer le champ thermique. Reprenons le précédent résultat concernant l'équation d'énergie:

$$\rho e_i^{n+1} = \rho e_i^n - \lambda u(\rho e_+^* - \rho e_-^*).$$

En vertu de l'équation d'état thermique, on peut remplacer l'énergie interne par une fonction de la température: $e = C_v T$. Ainsi:

$$(\rho C_v T)_i^{n+1} = (\rho C_v T)_i^n - \lambda u((\rho C_v T)_+^* - (\rho C_v T)_-^*).$$

L'observation de ce dernier résultat ne permet d'obtenir aucune indication sur le schéma de discrétisation de l'équation non-conservative sur C_v . En effet, les fonctions ρ , C_v , T sont toutes discontinues et aucun découplage n'apparaît. Dans le cas très particulier où la température des deux milieux est commune et uniforme, on a comme indication:

$$(\rho C_v)_i^{n+1} = (\rho C_v)_i^n - \lambda u((\rho C_v)_+^* - (\rho C_v)_-^*).$$

Comme C_v est un paramètre matériel qui obéit à l'équation d'évolution

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} + u \frac{\partial C_v}{\partial x} = 0,$$

le précédent résultat nous incite à considérer cette équation sous la forme conservative obtenue par combinaison avec l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho C_v}{\partial t} + \frac{\partial \rho C_v u}{\partial x} = 0.$$

En l'absence d'un guide clair pour la discrétisation de l'équation sur C_v nous avons effectué certains tests numériques. La discrétisation conservative:

$$(\rho C_v)_i^{n+1} = (\rho C_v)_i^n - \lambda((\rho C_v u)_+^* - (\rho C_v u)_-^*)$$

a été testée dans le cas gaz parfait et s'est avérée produire des résultats oscillants sur T . Nous avons alors abandonné cette formulation et testé le schéma non-conservatif:

$$C_{v_i}^{n+1} = C_{v_i}^n - \lambda u(C_{v_+}^* - C_{v_-}^*),$$

qui correspond directement à

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} + u \frac{\partial C_v}{\partial x} = 0.$$

Il s'est avéré donner de très bons résultats dans le cas gaz parfait. Nous avons alors poursuivi l'analyse pour l'équation d'état stiffened gas. Souvenons nous que dans ce cas l'équation d'état calorique s'écrit:

$$e(\rho, T) = e_j(\rho) + C_v T \text{ avec } e_j(\rho) = c_0 + P_\infty/\rho.$$

Il apparaît donc ici que la seule discrétisation de C_v n'est pas suffisante. Une nouvelle fonction de x et t est introduite: $c_0 = c_0(x, t)$. En cherchant à appliquer les mêmes principes que précédemment, aucun guide n'apparaît pour la discrétisation de cette dernière équation. Comme précédemment nous avons testé une formulation conservative

$$\frac{\partial \rho c_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_0 u}{\partial x} = 0$$

résolue par le schéma de Godunov et une formulation non-conservative

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + u \frac{\partial c_0}{\partial x} = 0$$

résolue par le schéma non-conservatif utilisé précédemment pour le calcul de γ . Les meilleurs résultats ont été obtenus avec le second schéma, et ne sont toutefois pas exempts d'oscillations. Sur un problème de tube à choc liquide/gaz nous avons représenté le comportement typique de la solution. Signalons qu'il s'agit dans l'absolu d'un cas test très raide représentatif des conditions extrêmes de l'application qui nous intéresse.

Le tube à choc est constitué d'une chambre contenant initialement du liquide à haute pression de l'abscisse $x = 0$ à $x = 0.7$ m. Sur l'autre partie du tube, à droite jusqu'à l'abscisse $x = 1$ m, il contient initialement un gaz. Les données initiales et les paramètres d'équation d'état du liquide et du gaz sont:

	Liquide	Gaz
ρ (kg/m ³)	1000	50
P (Pa)	10^9	10^5
u (m/s)	0	0
γ	4.4	1.4
P_∞ (Pa)	6×10^8	0
C_v (J/kg/K)	4180	1000
ρ_0 (kg/m ³)	1000	50
P_0 (Pa)	10^5	10^5

Les résultats de la simulation sont représentés sur la Fig. 3 à l'instant 338 μ s sur un maillage comportant 1000 cellules de calcul.

La solution exacte est représentée en traits et la solution numérique en symboles fins. Ce test est d'un intérêt particulier puisqu'il fait intervenir les trois types d'ondes possibles: une forte détente remontant dans la chambre haute pression de gauche, un choc se propageant dans la chambre basse pression de droite et l'interface se propageant entre les deux. Il apparaît clairement que toutes les variables de l'écoulement sont correctement calculées, sauf la température qui souffre d'une forte oscillation à l'interface.

À ce stade, il ne nous est pas possible de conclure sur cette formulation. Une discrétisation correcte de la température est peut être possible, mais aucun guide clair ne nous semble disponible. C'est pourquoi nous préférons abandonner cette formulation et en examiner d'autres.

4. Modèle multiphasique

La description complète de ce modèle et de la méthode de résolution peut être consultée dans les articles de Saurel et Abgrall [18] et Saurel et LeMetayer [20]. De même que précédemment, nous ne rappelons ici que les ingrédients essentiels et examinons le problème du calcul de la température.

Pour obtenir les équations du modèle multiphasique, on utilise la méthode d'homogénéisation de Drew et Passman [9] appliquée aux équations de Navier–Stokes compressibles de chaque composant. On néglige ensuite les termes dissipatifs partout sauf aux interfaces à l'échelle microscopique. De même, on néglige les fluctuations des variables de l'écoulement dans les fluides purs (termes turbulents), sauf aux interfaces où la vitesse et la pression d'interface sont considérées comme com-

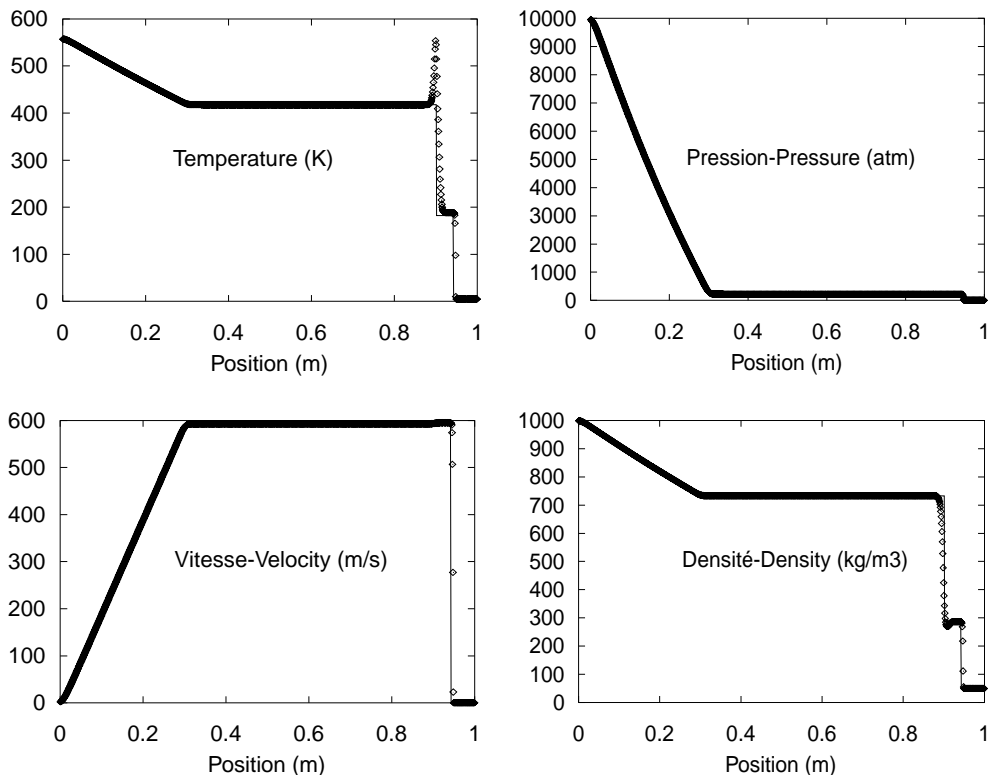


Fig. 3. Tube à choc liquide/gaz. Modèle minimum. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 1000 cellules.

posées d’une partie moyenne et d’une fluctuation. Les termes faisant intervenir les fluctuations des grandeurs d’interface sont particulièrement importants (termes $\mu(P_k - P'_k)$ et F_{dk} des équations suivantes) comme nous allons en discuter par la suite. Le modèle qui en résulte est décrit et résolu dans Saurel et Abgrall [18]. L’avantage majeur de ce modèle est qu’il est capable de traiter des problèmes à interface aussi bien que des mélanges multiphasiques habituels à plusieurs vitesses, densités, températures, etc.

Un autre modèle plus général encore a été proposé récemment [12]. Ce modèle tient compte des effets inertiels à l’échelle microscopique (pulsations de bulles par exemple), et de leurs couplages avec les effets à l’échelle macroscopique. Le modèle qui va être utilisé [18] est un modèle réduit par rapport à celui de [12]. Néanmoins, le modèle réduit sera préféré ici car les effets inertiels n’ont aucun intérêt pour la résolution de problèmes à interfaces. Ce modèle est composé d’un système de quatre équations aux dérivées partielles pour chaque phase k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + u_i \nabla \alpha_k &= \mu(P_k - P'_k), \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla(\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \nabla(\alpha_k \rho_k u_k \otimes u_k + \alpha_k P_k) &= P_i \nabla \alpha_k + F_{dk}, \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla(u_k(\alpha_k \rho_k E_k + \alpha_k P_k)) &= P_i u_i \nabla \alpha_k + F_{dk} u_i - \mu P_i (P_k - P'_k), \end{aligned} \quad (10)$$

avec les conditions d’interfaces moyennées:

$$\begin{aligned} \sum_k P_i \nabla \alpha_k + F_{dk} &= 0, \\ \sum_k P_i u_i \nabla \alpha_k + F_{dk} u_i - \mu P_i (P_k - P'_k) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Les notations sont classiques dans la littérature sur les écoulements multiphasiques. La fraction volumique α_k est définie par le volume occupé par la phase k sur le volume total. La contrainte de saturation impose $\sum \alpha_k = 1$. Les densité, vitesse, pression et énergie totale sont représentées par ρ , u , P et $E = e + 1/2uu$. Les indices k et i sont relatifs à la phase k et aux variables d’interface moyennées.

Notons que dans l’approche multiphasique, les constantes des équations d’état ne sont plus des fonctions de l’espace et du temps comme pour le premier modèle: ici ce sont des constantes pures. Ceci simplifiera grandement le calcul de la température en particulier, et en fait de toutes les variables thermodynamiques, y compris dans les zones de mélange numérique.

Les membres de gauche de ces équations sont classiques. Dans les membres de droite apparaissent la force de traînée F_{dk} (qui jouera un rôle important) et les termes

non-conservatifs $P_i \nabla \alpha_k$ et $P_i u_i \nabla \alpha_k$. Les termes $\mu(P_k - P'_k)$ et $\mu P_i (P_k - P'_k)$ sont liés au processus de relaxation des pressions. Ils sont d’une importance capitale. Les termes liés au transfert de masse et de chaleur n’ont pas été considérés car sans importance ici.

Ces termes ont été justifiés dans [5] par une analyse de l’inégalité d’entropie du système. Une autre façon de les justifier est de poser simplement que les variables d’interface admettent des fluctuations autour d’une valeur moyenne. La variable d’homogénéisation μ est liée à la nature des matériaux, à leur équation d’état, vitesse du son, topologie de l’interface, etc. Il s’agit d’une fonction très complexe à déterminer dans le cas général. En pratique, il est seulement important de comprendre que cette variable contrôle la vitesse à laquelle l’équilibre des pressions est atteint. Dans la grande majorité des situations physiques mettant en jeu des mélanges de fluides, cet équilibre est atteint très rapidement. Très rapidement signifie en fait plus rapidement que le pas de temps hydrodynamique. En particulier aux interfaces, l’équilibre doit être instantané afin de satisfaire la condition d’interface en pression. Pour de nombreuses autres situations (détonations, chocs dans les alliages solides, cavitation, etc.) l’hypothèse d’une relaxation instantanée des pressions est encore valide. Ainsi en pratique la connaissance de la fonction μ n’est pas nécessaire.

Ce modèle va être utilisé ici pour la résolution de problèmes à interfaces. Mais il est en réalité bien plus général. Il peut être utilisé pour des problèmes d’écoulements à deux vitesses, pour la modélisation des ondes de compaction et détonation [5,15]. Un aperçu sur les différentes possibilités (détonations, chocs dans les mélanges, cavitation dans les liquides) est donné dans la référence [20].

Avant d’entrer dans le détail des termes qui vont être particulièrement importants, donnons une image simple des termes non-conservatifs $P_i \nabla \alpha_k$ et $P_i u_i \nabla \alpha_k$. Les équations d’Euler moyennées sur la section droite d’une tuyère notée A , en absence de transfert de masse, quantité de mouvement et énergie s’écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A \rho}{\partial t} + \frac{\partial (A \rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial A \rho u}{\partial t} + \frac{\partial A(\rho u^2 + P)}{\partial x} &= P \frac{\partial A}{\partial x}, \\ \frac{\partial A \rho E}{\partial t} + \frac{\partial A u(\rho E + P)}{\partial x} &= -P \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Dans un système diphasique, la fraction volumique α peut être aussi vue comme une fraction surfacique. En admettant cette analogie et en remplaçant la dérivée temporelle $\partial A / \partial t$ par la dérivée spatiale $u \partial A / \partial x$ à l’aide de la première équation du système multiphasique, on retrouve les mêmes équations pour le modèle 1D d’équations d’Euler moyennées et le modèle multiphasique.

Ceci signifie que les termes non-conservatifs du modèle multiphasique jouent le même rôle que les termes de variation de section. Cette image simple peut être utile pour l'établissement de schémas numériques, ou l'analyse de solutions.

Ceci signifie aussi que la modèle multiphasique "couple" plusieurs systèmes d'équations d'Euler dans des conduits de section variable. Ces "conduits" ont des parois perméables aux différents transferts, se déplacent à la vitesse moyenne interfaciale u_i , s'élargissent ou rétrécissent en fonction du différentiel de pression $\mu(P_k - P'_k)$ à une vitesse contrôlée par μ .

4.1. Relations de fermeture

Les seules relations de fermeture qui seront examinées ici sont celles qui sont importantes pour la présente application: u_i , P_i , $\mu(P_k - P'_k)$ et F_{dk} .

4.1.1. Moyenne des pressions aux interfaces

Dans notre approche, chaque phase est considérée compressible avec sa propre pression, énergie interne et densité. Considérer chaque phase compressible garantit l'hyperbolicité inconditionnelle du modèle, tant que les expressions de u_i et P_i sont des fonctions ne faisant intervenir aucune dérivée des autres variables. Ainsi, il y a une certaine liberté dans le choix des moyennes des grandeurs aux interfaces par rapport à l'hyperbolicité.

Pour la présente application, les pressions et les vitesses seront relaxées instantanément durant la résolution numérique. Ainsi, notre stratégie est de choisir ces variables le plus près possible de l'état relaxé. Un choix préservant la symétrie est aussi préféré. Une estimation raisonnable qui considère la compressibilité de chaque phase et qui préserve la symétrie est de prendre la moyenne des pressions aux interfaces égale à la pression dynamique de mélange:

$$P_i = \sum \alpha_k (P_k + \rho_k (V_i - u_k)^2).$$

Ce choix est aussi motivé par l'analyse des invariants de Riemann du modèle qui ne sera pas détaillée ici.

Les pressions de chaque phase P_k sont données par des équations d'état appropriées: $P_k = P_k(\rho_k, e_k)$.

4.1.2. Vitesse d'interface moyenne

Pour les mêmes raisons que précédemment on retient pour la moyenne des vitesses aux interfaces la vitesse du centre de masse:

$$u_i = \sum \alpha_k \rho_k u_k / \sum \alpha_k \rho_k.$$

4.1.3. Termes de relaxation des pressions

Le modèle contient des termes non-classiques concernant le processus de relaxation des pressions

$\mu(P_k - P'_k)$ dans l'équation sur la fraction volumique et $\mu P_i (P_k - P'_k)$ dans l'équation d'énergie.

Le premier terme représente le taux d'expansion ou contraction de la fraction de volume α_k afin que les pressions tendent vers l'équilibre. La signification physique de ce terme est simple. Si les différentes phases ne sont pas en équilibre de pression après passage des ondes, alors le volume des phases évoluera jusqu'à ce que les pressions soient à l'équilibre. La variable μ contrôle la vitesse à laquelle l'équilibre est atteint.

Lorsque les pressions ne sont pas en équilibre, les entités élémentaires de fluide (bulles, gouttes, etc.) ont un mouvement 3D à l'échelle microscopique provoquant un changement de volume afin que les pressions tendent vers l'équilibre. Ce mouvement 3D à l'échelle microscopique n'a pas été considéré dans les vitesses moyennes des phases et dans notre estimation de la vitesse moyenne des interfaces. La vitesse moyenne des interfaces présente dans la première équation du modèle est en fait une vitesse translationnelle à l'échelle macroscopique. Introduire une variation de volume fonction du différentiel de pressions revient à corriger ce choix un peu trop simple et à récupérer des informations du milieu microscopique.

Dans l'absolu, la variable d'homogénéisation μ dépend de la compressibilité de chaque fluide (et donc de son équation d'état), de leur nature, de leurs vitesses à l'échelle microscopique et de la topologie de l'interface. Il s'agit donc d'une fonction extrêmement difficile à déterminer. Mais pour la plupart des applications, et en particulier pour la présente, cette variable peut être considérée, infinie.

Sur une interface les pressions de part et d'autre doivent être égales à chaque instant. Si ce coefficient est infiniment grand, cette condition sera réalisée à chaque instant, en particulier à l'intérieur de la zone de diffusion numérique qu'est l'interface. C'est ce qui a été proposé dans [18].

4.1.4. Termes de relaxation des vitesses

Ces termes de relaxation sont très classiques dans les écoulements diphasiques et sont représentés par la force F_{dk} . Ce qui est moins classique dans notre approche est de les considérer avec un paramètre de relaxation infini.

Une force de traînée générale peut être mise sous la forme:

$$F_{dk} = \lambda_k (u_k - u'_k),$$

où λ_k est une fonction positive. Elle contrôle la vitesse à laquelle les vitesses tendent vers l'équilibre. Dans certaines situations physiques, cette fonction tend vers l'infini (voir [15,20]).

Par ailleurs, pour des raisons purement numériques durant la résolution de problèmes à interfaces nous

avons montré que certaines pertes d'information (directions caractéristiques perdues) pouvaient être remplacées par des termes de relaxation.

Dans le paragraphe précédent, l'égalité des pressions était assurée par l'utilisation d'un coefficient de relaxation des pressions infini. Pour restituer la seconde condition d'interface (égalité des vitesses) un coefficient de traînée infini doit être utilisé.

4.2. Méthode numérique

La méthode numérique est complètement détaillée dans Saurel et Abgrall [18] et étendue au cas 2D dans Saurel et LeMetayer [20]. Elle reprend les mêmes idées de base que celles qui ont été utilisées pour le modèle de Section 3 (modèle minimum). L'exposé de cette méthode étant assez long, nous préférons renvoyer le lecteur vers ces deux références. Des améliorations sensibles de cette méthode sont en cours, en particulier pour le traitement des termes non-conservatifs $u_i \nabla \alpha_k$, $P_i \nabla \alpha_k$ et $P_i u_i \nabla \alpha_k$ et les estimations des grandeurs aux interfaces [4].

Dans tous les cas, la méthode est composée d'un opérateur hyperbolique qui traite la dynamique des différentes ondes, suivi sur le même pas de temps d'un opérateur de relaxation des vitesses et des pressions. A l'issue de cette étape, les fluides ont tous la même vitesse et la même pression.

4.3. Retour vers les variables monofluides

Le modèle multiphasique permet la détermination des variables thermodynamiques de chaque phase en tout point y compris de la zone de diffusion numérique. Ce modèle étant utilisé ici pour la résolution d'un problème à interfaces, il nous faut préciser comment sont déterminées les variables représentatives de la solution.

En ce qui concerne les pressions et les vitesses, aucune ambiguïté n'est possible puisque après relaxation les fluides évoluent sous une pression et vitesse communes en tout point.

La variable représentative du champ de densité est la densité de mélange définie par $\rho = \sum \alpha_k \rho_k$.

Le point le plus intéressant pour notre application est le calcul de la température. Comme nous l'avons déjà précisé, toutes les constantes des équations d'état ne sont plus dans cette représentation des fonctions de l'espace et du temps: ce sont des constantes pures. Ainsi la température "monofluide" sera en fait la température de mélange obtenue à partir de la définition de l'énergie de mélange. A partir de la définition de l'énergie totale du système multiphasique et compte tenu de l'équilibre des vitesses entre phases, on obtient que l'énergie interne du système s'écrit: $\rho e = \sum \alpha_k \rho_k e_k$.

On utilise maintenant l'équation d'état calorique sous la formulation Mie-Grüneisen $e_k(\rho_k, T_k) = e_{jk}(\rho_k) + C_{v_k} T_k$. En injectant cette expression dans la définition de l'énergie interne du mélange, on obtient la définition de la température de mélange:

$$T = \frac{\rho e - \sum \alpha_k \rho_k e_{jk}(\rho_k)}{\alpha_k \rho_k C_{v_k}},$$

qui est la température qui nous intéresse.

4.4. Résultats

Le modèle et la méthode sont appliqués au même test du tube à choc que précédemment, sur le même maillage et les résultats sont affichés au même instant. On peut noter que cette méthode fournit une qualité de résultats comparable à la précédente, à l'exception près que la température est maintenant parfaitement déterminée (voir Fig. 4).

Cette méthode constitue donc un candidat de choix pour la présente application. Toutefois, on peut noter que cette formulation n'est pas exempte d'imperfection. Ses deux défauts essentiels sont:

- Une diffusion numérique excessive de l'interface. Ceci peut être noté en comparant la courbe de diffusion de la densité à l'interface entre le modèle minimum et le présent modèle. La méthode numérique du modèle multiphasique est trop diffusive aux interfaces. En effet, le décentrement des ondes qui est proposé dans [18,20] est trop rudimentaire. Cet inconvénient est éliminé dans [4], mais malheureusement au prix d'une complexité accrue.
- Un coût calcul important. Le nombre d'équations à résoudre est au minimum le double que pour le modèle minimum dans le cas de deux fluides (le triple dans le cas de trois fluides etc.). Ainsi, l'opérateur hyperbolique à lui seul est au moins deux fois plus coûteux que pour une formulation monofluide. S'ajoute ensuite le coût calcul de l'opérateur de relaxation: ce dernier est d'un coût comparable à l'opérateur hyperbolique.

C'est pourquoi nous allons maintenant rechercher une formulation qui ne souffre pas de ces défauts tout en garantissant la même efficacité pour le calcul de la température. Bien sur, ceci sera réalisé au prix d'une perte de généralité: le nouveau modèle ne sera valide que pour les problèmes à interfaces. Il ne sera pas non plus capable de traiter des mélanges à deux vitesses, ou des chocs dans les mélanges.

5. Modèle multiphasique réduit

Ce modèle est en fait une réduction du modèle précédent dans le sens où il ne sera valide que pour des

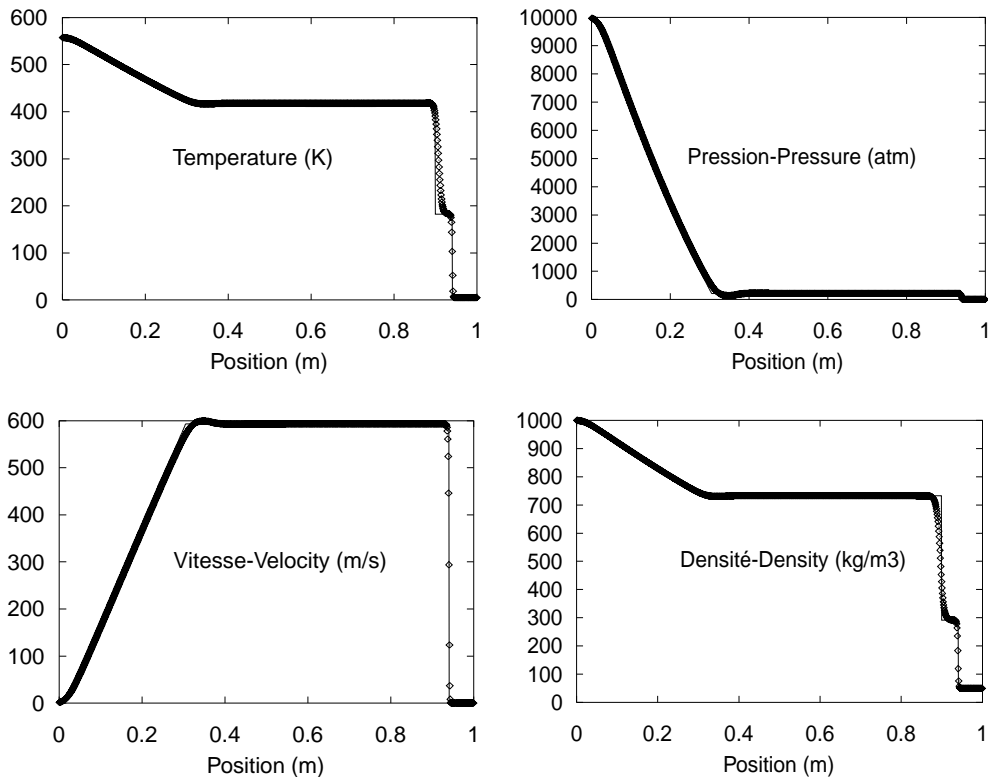


Fig. 4. Tube à choc liquide/gaz. Modèle multiphasique complet. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 1000 cellules.

problèmes à interfaces, alors que le modèle précédent était valide pour des mélanges au sens large. Ce nouveau modèle se rapproche de précédentes tentatives infructueuses de modèles homocinétiques comme décrit dans Cocchi [8].

L'expérience acquise dans la mise au point du modèle et de la méthode précédente, soldée par un succès à la fois pour le calcul des variables dynamiques et thermodynamiques (y compris T) nous incite à en reprendre certains ingrédients qui vont venir compléter le premier modèle étudié (le modèle minimal).

Les informations essentielles apportées par le modèle multiphasique sont en effet:

- la connaissance des densités de chacun des matériaux purs permettant une détermination correcte des fonctions $e_{jk}(\rho_k)$ qui interviennent dans le calcul de la température,
- la non-dépendance spatio-temporelle des différentes constantes des équations d'état.

Ainsi, le nouveau modèle que nous proposons d'utiliser est obtenu par sommation des équations d'énergie et du mouvement de chaque phase. Il est composé de deux équations pour chaque phase k et de deux équations traduisant l'évolution du mouvement moyen et de l'énergie du mélange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \alpha_k &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla (\alpha_k \rho_k \bar{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla (\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + P) &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} (\rho E + P)) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Les notations sont celles qui ont été définies précédemment.

Il est très clair que ce modèle est une réduction du modèle multiphasique complet précédent. Il est aussi facile de montrer qu'il est une extension du modèle minimum que nous avons examiné en premier.

En effet, l'équation de conservation de la masse du modèle minimum est obtenue par simple sommation des équations de conservation de la masse de chaque phase k . De plus, l'équation

$$\frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial t} + u \frac{\partial 1/(\gamma - 1)}{\partial x} = 0$$

indispensable au modèle minimum est en réalité identique à

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \alpha_k = 0$$

du nouveau modèle. En effet, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants $1/(\gamma - 1) = \sum \alpha_k / (\gamma_k - 1)$.

Une autre remarque importante s'impose. L'utilisation de ce modèle lors de la résolution peut conduire à des résultats corrects ou complètement erronés. C'était déjà le cas des modèles précédents, mais ici la séquence des opérations est très importante. Par exemple, si ce modèle est utilisé sous l'hypothèse d'égalité des températures entre phases, les conditions d'interface les plus élémentaires ne seront pas satisfaites, alors qu'utilisé comme isobare, les résultats sont tout à fait satisfaisants. Nous verrons aussi que lorsque le modèle est utilisé sous sa forme isotherme, il n'est alors absolument pas isobare, et inversement. Il ne s'agit donc nullement d'un modèle isobare–isotherme.

Faisons lui subir tout d'abord le test habituel: un écoulement uniforme en pression et en vitesse doit rester durant son évolution temporelle.

La discrétisation des équations de masse et du mouvement conduit aux mêmes résultats que pour le modèle minimal. On reprend donc les développements à partir de la forme discrète de l'équation d'énergie:

$$\rho e_i^{n+1} = \rho e_i^n - \lambda u (\rho e_+^* - \rho e_-^*).$$

L'état “*” désigne l'état solution du problème de Riemann obtenu par un solveur adapté pour le système étudié. Nous reviendrons sur cette question par la suite.

Comme précédemment on utilise la définition de l'énergie interne du mélange $\rho e = \sum \alpha_k \rho_k e_k$. On remplace chaque produit $\rho_k e_k$ par son expression en fonction de la pression en utilisant la loi d'état sous la forme Mie–Gruneisen.

On obtient:

$$\rho e = \sum \alpha_k / \Gamma_k P_k - \sum \alpha_k / \Gamma_k P_{jk}(\rho_k) + \sum \alpha_k \rho_k e_{jk}(\rho_k).$$

Dans le cadre de l'équation d'état stiffened gaz, les fonctions $P_{jk}(\rho_k)$ et $e_{jk}(\rho_k)$ peuvent être combinées afin de faire disparaître la dépendance en ρ_k (voir la première forme de la loi d'état stiffened gas de ce document). En remplaçant maintenant l'expression de ρe dans la forme discrète de l'équation d'énergie, on obtient une condition nécessaire pour que la pression reste uniforme au cours du temps. Cette condition est en fait le schéma de discrétisation de l'équation non-conservative:

$$\alpha_{k_i}^{n+1} = \alpha_{k_i}^n - \lambda u (\alpha_{k_+}^* - \alpha_{k_-}^*).$$

Il s'agit une fois de plus du même schéma que pour le modèle multiphasique et le modèle minimal.

Lorsque les fonctions $P_{jk}(\rho_k)$ et $e_{jk}(\rho_k)$ sont réellement des fonctions de la densité de chaque fluide, on peut montrer qu'un terme supplémentaire doit être pris en compte dans l'équation d'évolution de la fraction volumique. Ce terme est facteur de $\partial u / \partial x$. Notre

expérience acquise sur le modèle multiphasique en utilisant des lois d'état complexes a montré que l'importance de ce terme n'était pas fondamentale pour la résolution lorsqu'on s'intéressait à des problèmes à interfaces ($\partial u / \partial x$ tend vers zéro rapidement sur les mailles proches de l'interface). La raison est que la densité des fluides ρ_k varie peu autour de l'interface. Ainsi les fonctions $P_{jk}(\rho_k)$ et $e_{jk}(\rho_k)$ sont localement des constantes, et la discrétisation proposée du modèle (13) est adaptée.

5.1. Fermeture thermodynamique

Afin d'obtenir la pression de mélange à utiliser dans le modèle, on reprend la définition de l'énergie interne du mélange dans laquelle on suppose que toutes les pressions P_k sont égales. Il s'agit alors d'un modèle isobare. La pression est alors obtenue par:

$$P = \frac{\rho e + \sum \alpha_k / \Gamma_k P_{jk}(\rho_k) - \sum \alpha_k \rho_k e_{jk}(\rho_k)}{\sum \alpha_k / \Gamma_k}. \quad (14)$$

Les températures de chaque fluide sont alors obtenues par l'utilisation des deux équations d'état des fluides purs:

$$T_k = (e_k - e_{jk}(\rho_k)) / C_{vk},$$

où l'énergie interne de chaque fluide est obtenue par la connaissance de la pression:

$$e_k = \frac{P - P_{jk}(\rho_k)}{\rho_k \Gamma_k} + e_{jk}(\rho_k).$$

La température de mélange est alors obtenue par la même formule que dans le cas multiphasique, que l'on peut simplifier ainsi:

$$T = \frac{\sum \alpha_k \rho_k C_{vk} T_k}{\sum \alpha_k \rho_k C_{vk}}. \quad (15)$$

Une remarque importante s'impose. Plutôt que de supposer que les pressions des différents fluides sont égales, nous aurions pu supposer que les températures des fluides étaient égales. Dans ce cas, la séquence de calcul qui permettrait le calcul de la pression serait:

- extraire la température de:

$$T = \frac{\rho e - \sum \alpha_k \rho_k e_{jk}(\rho_k)}{\sum \alpha_k \rho_k C_{vk}},$$

- déterminer les énergies internes des fluides:

$$e_k(\rho_k, T) = e_{jk}(\rho_k) + C_{vk} T,$$

- déterminer les pressions de chaque fluide:

$$P_k(\rho_k, e_k) = P_{jk}(\rho_k) + \rho_k \Gamma_k (e_k - e_{jk}(\rho_k)),$$

- en déduire la pression de mélange:

$$P = \frac{\sum \alpha_k P_k / \Gamma_k}{\sum \alpha_k / \Gamma_k}.$$

Contrairement à la première séquence basée sur l'hypothèse d'égalité des pressions, cette deuxième séquence conduit à un *non-respect des conditions d'interface*. On peut s'en assurer en examinant le schéma de Godunov sur un pas de temps dans le cas d'un écoulement uniforme en vitesse et en pression. On peut aussi comprendre que cette procédure est vouée à l'échec car une discontinuité de contact est bien une zone de pression uniforme, tandis que la température est discontinue.

Contrairement au modèle multiphasique, ce modèle ne contient que trois ondes distinctes: $u + c$, $u - c$ et u . Il est donc aussi inconditionnellement hyperbolique, et les relations des chocs sont largement plus simples puisque les termes non-conservatifs sont absents.

La vitesse du son d'équilibre est obtenue aisément. En notant:

$$\beta = \sum \frac{\alpha_k}{\Gamma_k},$$

$$\eta = \sum \frac{\alpha_k P_{jk}(\rho_k)}{\Gamma_k},$$

$$\theta = \sum \alpha_k \rho_k e_{jk}(\rho_k),$$

on obtient:

$$c^2 = \frac{\rho e + P - \sum \rho_k \left((\partial \eta / \partial \rho_k)_{z_k} + (\partial \theta / \partial \rho_k)_{z_k} \right)}{\rho \beta}.$$

5.2. Solveur de Riemann

Le modèle étant peu différent des équations d'Euler, les solveurs de Riemann adaptés aux équations d'état de gaz réels seront facilement adaptables pour ce modèle. On peut citer les solveurs de type HLL [14], HLLC [22], Dubroca [11], les solveurs linéarisés (en variables caractéristiques [21]), etc.

Dans le cas particulier où la loi d'état de chaque fluide est de type stiffened gas, on peut aussi utiliser un solveur exact. Les paramètres de mélange de la loi d'état stiffened gas s'écrivent:

$$\gamma = 1 + 1/\beta,$$

$$P_\infty = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\theta - \eta - \sum \alpha_k \rho_k c_{0k} \right),$$

et un solveur de Riemann classique développé pour les équations d'Euler avec l'équation d'état stiffened

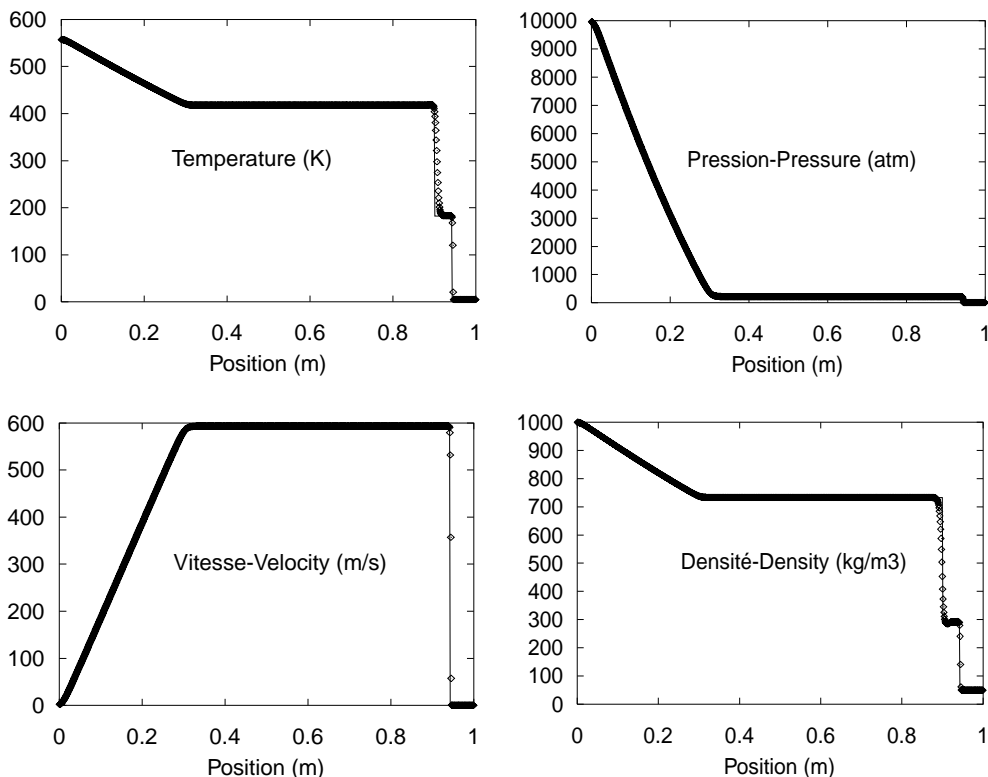


Fig. 5. Tube à choc liquide/gaz. Modèle multiphasique réduit. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 1000 cellules.

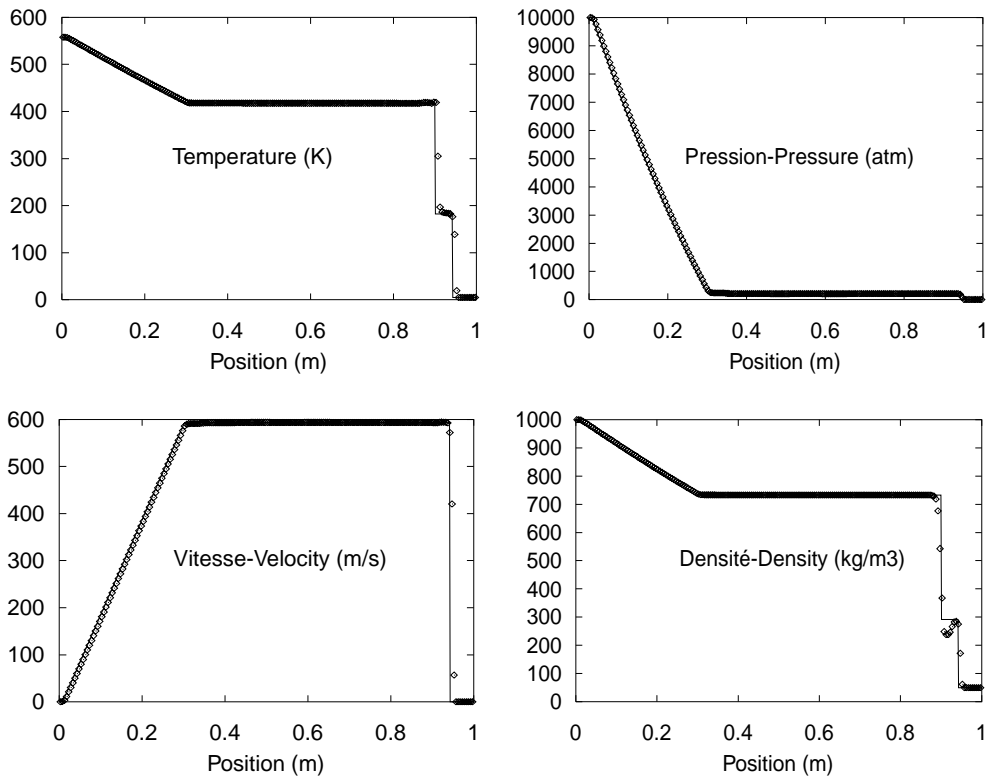


Fig. 6. Tube à choc liquide/gaz. Modèle multiphasique réduit. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 200 cellules.

gas s'applique. Ceci permet de conserver le même solveur de Riemann pour les comparaisons entre modèles.

Le schéma numérique adopté pour la résolution du système (13) est donc composé du schéma du Godunov pour la partie conservative, donné par la relation (7), et du schéma (9) pour la discrétisation de l'équation d'évolution de la fraction volumique. Les variables comportant une astérisque dans les relations (7) et (9) sont les solutions du problème de Riemann, obtenues par l'un des solveurs précités.

La pression est toujours calculée à partir de la relation (14).

5.3. Résultats

Le modèle et la méthode sont appliqués au même test du tube à choc que précédemment, sur le même maillage et les résultats sont affichés au même instant. Le nouveau modèle fournit une solution en parfait accord avec la solution exacte et la diffusion numérique de l'interface n'est pas plus importante qu'avec le modèle minimum (Fig. 5). On peut même noter un léger progrès. En fait, la solution n'est pas plus diffusée que pour une simulation faisant intervenir les équations d'Euler portant sur un

fluide pur (noter les rapports de pressions et de densités initiaux).

On peut maintenant examiner la qualité de la solution lorsque le maillage est plus grossier. On reprend le même cas test mais en utilisant maintenant seulement 200 cellules de calcul. Les résultats sont représentés sur la Fig. 6.

Cette méthode assure une précision tout à fait correcte et est à peine plus coûteuse que la simple résolution des équations d'Euler pour un fluide pur. Il s'agit donc d'un excellent candidat pour la présente application.

Nous allons néanmoins examiner une autre méthode qui a été proposée récemment car elle semble posséder des aptitudes à converger vers la solution de façon très efficace.

6. Méthode à deux flux

Cette dernière méthode se distingue des précédentes. On revient à une formulation basée uniquement sur les équations d'Euler complétée par une fonction indicatrice permettant la localisation de l'interface. Cette méthode ne considère plus le mélange numérique qui se crée. Elle

se contente de déterminer des flux numériques pour les mailles proches de l'interface qui vont ignorer le mélange artificiel tout en satisfaisant les conditions d'interface. Cette méthode est décrite dans Abgrall et Karni [2].

Le modèle est simplement composé des équations d'Euler complétées par un scalaire passif qui permet la détermination de la position de l'interface.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P) &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\vec{u}(\rho E + P)) &= 0, \\ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla(\rho f \vec{u}) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

La fonction f vaut initialement 1 dans l'un des deux fluides et -1 dans l'autre. L'interface est représentée par le niveau 0 de cette fonction. Cette fonction est appelée Level Set dans la littérature anglo-saxonne.

Comme précédemment, on note U le vecteur des variables conservatives: $U = (\rho, \rho u, \rho E, \rho f)^T$ et W le vecteur des variables primitives. Notons aussi EOS_k l'équation d'état du fluide k accompagnée de ses propres paramètres.

La méthode suit une séquence très précise:

1. On connaît pour tout point i à l'instant t_n les variables primitives W_i^n .
2. On calcule le vecteur des variables conservatives U_i^n en utilisant EOS_i^n (l'équation d'état du fluide appropriée à l'instant t_n et au point considéré).
3. Si le produit $f_i^n \cdot f_{i+1}^n < 0$ alors l'interface se situe entre les centres des mailles i et $i+1$.
4. Dans ce cas seulement on calcule deux flux numériques sur le bord de maille $i+1/2$:

$$F_{i+1/2,-}^* = \text{RP}(W_i^n, W_{i+1}^n, \text{EOS}_i^n, \text{EOS}_i^n).$$

RP désigne la solution du problème de Riemann avec pour état gauche W_i^n et pour état droite W_{i+1}^n .

Le flux numérique qui va être utilisé dans le schéma de Godunov pour l'évolution en temps de la maille i est obtenu à l'aide des variables primitives de part et d'autre du bord de maille, et donc de l'interface, mais en utilisant de chaque côté l'équation d'état du fluide présent dans la maille i .

De façon symétrique, on calcule

$$F_{i+1/2,+}^* = \text{RP}(W_i^n, W_{i+1}^n, \text{EOS}_{i+1}^n, \text{EOS}_{i+1}^n),$$

qui sera utilisé pour l'évolution en temps des variables de la maille $i+1$. On utilise cette fois l'équation

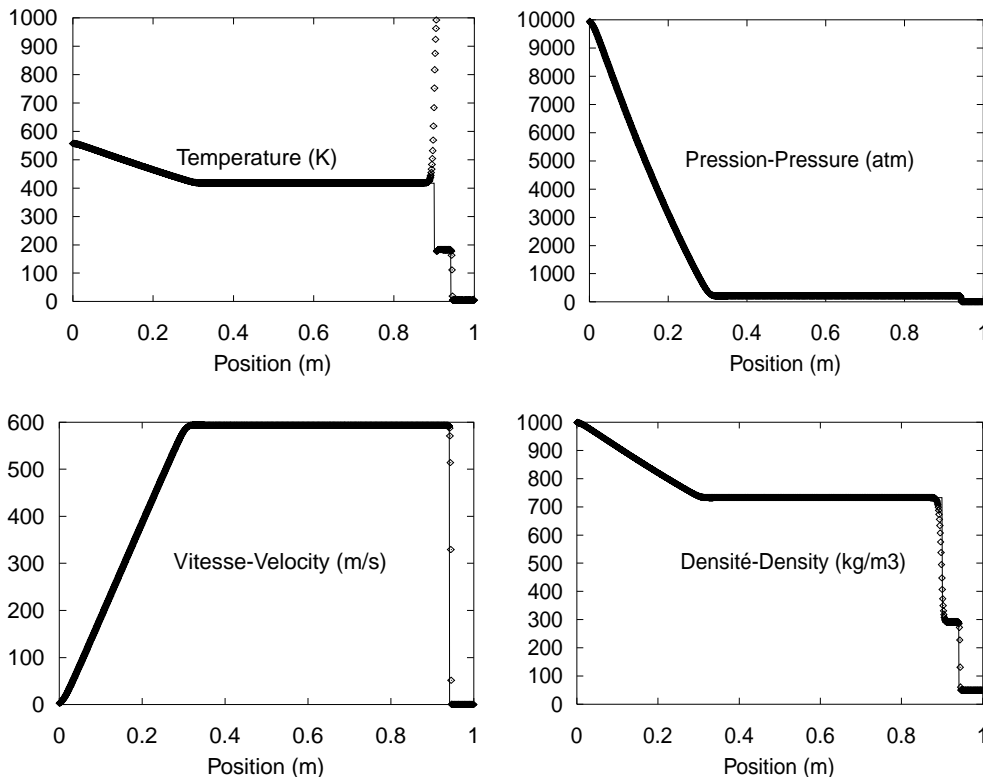


Fig. 7. Tube à choc liquide/gaz. Méthode à deux flux. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 1000 cellules.

d'état du fluide $i + 1$ présent dans cette maille à l'instant t_n .

Remarquons que $F_{i+1/2,-}^* \neq F_{i+1/2,+}^*$. Ce schéma n'est donc pas conservatif.

5. Le schéma de Godunov permet alors l'évolution en temps de la solution:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*).$$

6. Afin d'assurer l'uniformité en pression de la solution dans le cas d'une discontinuité de contact on calcule le vecteur des variables primitives W_i^{n+1} à partir de U_i^{n+1} mais en utilisant l'équation d'état de l'instant t_n , EOS_i^n .

7. On reconstruit alors le vecteur des variables conservatives en utilisant maintenant l'équation d'état du fluide à l'instant t_{n+1} : $U_i^{n+1} = U(W_i^{n+1}, EOS_i^{n+1})$. EOS_i^{n+1} est obtenue en fonction du produit $f_i^n \cdot f_{i+1}^n$ comme en (3).

Cette méthode n'est malheureusement pas conservative, mais est dotée d'une robustesse et d'une capacité de convergence impressionnante dans le cas 1D au moins. Elle a été mise en œuvre avec succès dans le cas 2D [16]. Les erreurs de conservation dans le cas 1D ont été évaluées comme étant de faible importance. Sur le même test que précédemment, les résultats sont représentés sur la Fig. 7.

Il apparaît clairement que la température est très erronée. Cette méthode utilisée sous sa formulation standard conduit donc à de grandes erreurs. La raison est aisément compréhensible. Les variables densité et énergie interne subissent une diffusion artificielle au niveau de l'interface. Par contre, les paramètres de l'équation d'état sont exactement calculés, puisque l'interface est exactement repérée par la fonction Level Set. Le calcul de la température est donc effectué avec d'une part des variables artificielles comme la densité et l'énergie interne, et d'autre part avec des variables exactes comme C_v et γ . La combinaison de variables exactes et artificielles conduit à l'incompatibilité qui apparaît sur la température.

Cette méthode peut toutefois être modifiée et améliorée en utilisant les enseignements apportés par le modèle multiphasique réduit. En effet, la méthode à deux flux permet une évaluation correcte de la pression, ce qui permettrait une évaluation des énergies internes des fluides par $e_k = [P - P_{jk}(\rho_k)]/\rho_k \Gamma_k + e_{jk}(\rho_k)$ et par voie de conséquence des températures par $T_k = (e_k - e_{jk}(\rho_k))/C_{vk}$ à condition que les densités des différents fluides soient connues. Leur détermination peut être réalisée comme précédemment en complétant le système du modèle à deux flux par les deux premières équations

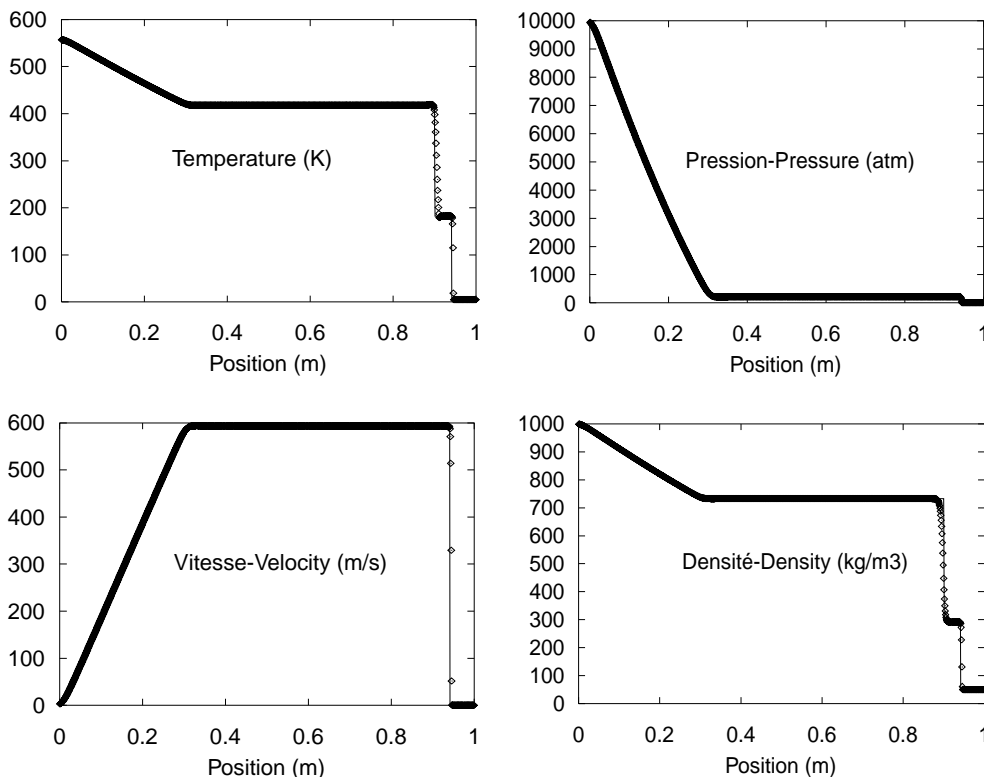


Fig. 8. Tube à choc liquide/gaz. Méthode à deux flux modifiée. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 1000 cellules.

du modèle multiphasique réduit. Le système complet devient alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \alpha_k &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla (\alpha_k \rho_k \bar{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \bar{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla (\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + P) &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} (\rho E + P)) &= 0, \\ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla (\rho f \bar{\mathbf{u}}) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

La première des équations rajoutées est résolue par le schéma non-conservatif habituel, tandis que les équations portant sur les densités partielles sont résolues par le schéma conservatif. Observons maintenant le comportement de la solution sur le test du tube à choc avec un maillage à 1000 cellules. Les résultats sont représentés sur la Fig. 8. La précision sur le calcul de la température est maintenant pleinement satisfaisante.

En utilisant un maillage plus grossier, le même type d'accord est conservé (voir Fig. 9).

Cette méthode présente désormais une précision comparable au modèle multiphasique réduit. Néanmoins, son application pour le présent problème pose certaines difficultés et questions:

- Le caractère conservatif est perdu. On peut s'attendre à une perte plus importante en multidimensionnel en raison des positions singulières que peut prendre l'interface sur le maillage. L'interface peut croiser deux fois l'un des axes du maillage dans la même cellule et l'erreur de conservation peut être aggravée.
- L'extension de la méthode au cas de plusieurs fluides (au nombre supérieur à deux) peut poser des problèmes d'interpénétration des fonctions Level Set. Ce problème doit être considéré avec une attention particulière et viendra pénaliser l'efficacité globale de la méthode.

Pour résumer, cette méthode constitue un bon candidat pour la présente application, mais nécessitera un investissement supérieur, tant au niveau des ressources informatiques qu'humaines, à celui du modèle multiphasique réduit.

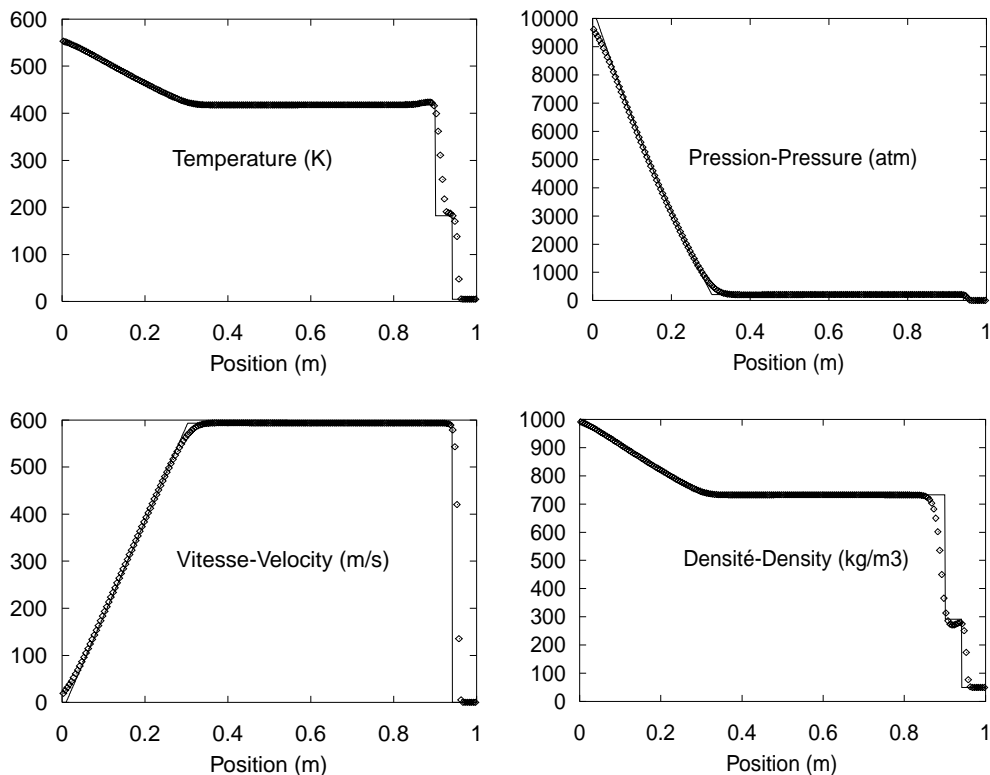


Fig. 9. Tube à choc liquide/gaz. Méthode à deux flux modifiée. Solution exacte en traits épais. Solution numérique en symboles. Maillage à 200 cellules.

7. Traitement de la diffusion de la chaleur

Les différentes méthodes que nous venons d'évaluer pour le calcul de la température sont toutes potentiellement utilisables pour l'application qui nous intéresse. Le premier modèle souffre encore de quelques défauts de mise au point et nous préférons l'abandonner. La deuxième méthode, basée sur une description multiphasique de l'écoulement est un excellent candidat. Toutefois, avec la méthode numérique qui est utilisée, les interfaces sont très diffusées et le traitement des termes non-conservatifs aux chocs souffre de quelques imperfections. Nous examinons actuellement une nouvelle méthode qui répondra à ces questions [4].

Il est important aussi d'examiner l'objectif visé. Si le seul objectif est de traiter le problème à interface sous fort rayonnement qui est décrit en Section 1, ce type de modèle et de méthode est peut être trop riche et trop complexe. Si une autre physique est à envisager: chocs dans les mélanges, effets inertiels aux micro-échelles, détonations, cavitation, alors ce modèle doit faire l'objet d'une attention particulière.

Dans le cadre de ce document, nous considérons que seule l'application présentée en Section 1 est visée. Dans ce cas, les troisième et quatrième modèles, basés sur le modèle multiphasique réduit et la méthode à deux flux sont plus compétitifs. Ils sont en effet plus simples à résoudre, plus rapides et plus précis. Parmi ces deux

méthodes, la plus compétitive en terme d'investissement informatique et humain est la méthode basée sur le modèle multiphasique réduit. C'est celle que nous retenons pour la suite de l'étude et pour laquelle nous envisageons maintenant le traitement des termes de diffusion de la chaleur.

Le système est maintenant complété par un terme de diffusion de chaleur dans l'équation d'énergie:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_k = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla (\alpha_k \rho_k \vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla (\vec{u}(\rho E + P)) = \text{div}(\lambda \nabla T).$$

Le terme $\text{div}(\lambda \nabla T)$ est obtenu par sommation des termes diffusifs des équations d'énergie de chaque phase:

$$\text{div}(\lambda \nabla T) = \sum \text{div}(\alpha_k \lambda_k \nabla T).$$

La discrétisation de ce terme ne pose alors aucune difficulté tant que la vitesse de diffusion est inférieure à la vitesse de convection.

On considère un maillage 1D à pas constant Δx . On note $q_k = -\alpha_k \lambda_k \partial T / \partial x$ le flux de chaleur et

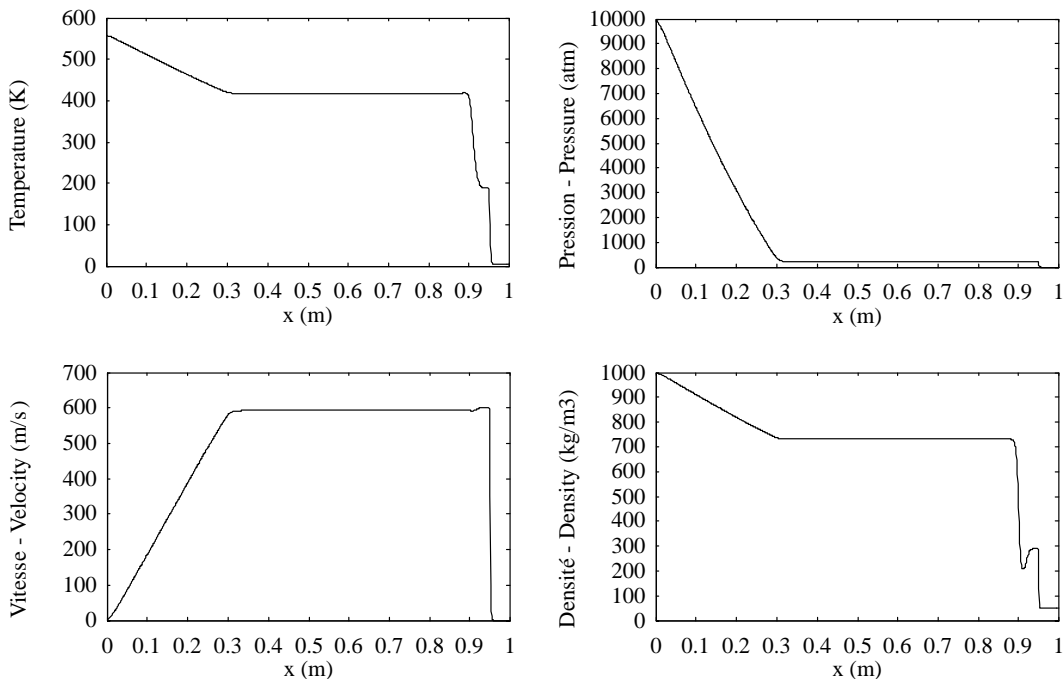


Fig. 10. Tube à choc liquide/gaz. Modèle multiphasique réduit avec prise en compte des conductivités thermiques. Maillage à 1000 cellules.

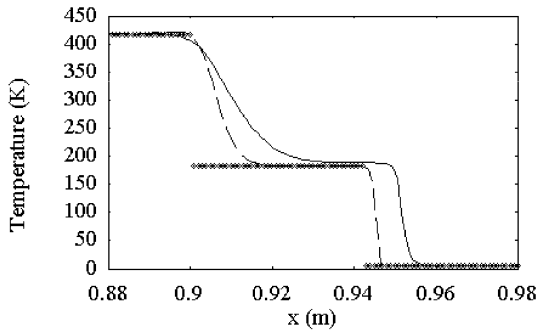


Fig. 11. Zoom de la température sur le problème du tube à choc. Solution exacte du problème sans diffusion en symboles. Solution numérique sans diffusion et avec diffusion en lignes brisées. La solution qui tient compte de la diffusion est la plus déportée à droite.

$F_{k,th} = (0, 0, \vec{0}, \sum q_k)$ le flux thermique de la formulation du système multiphasique réduit $\partial U / \partial t + \text{div}(F(W) - F_{th}(W)) = 0$. L'approximation numérique du flux thermique est obtenue par une formule très classique pour les méthodes en volumes finis:

$$F_{k,th,i+1/2}^* = - \sum \alpha_{k,i+1/2} \lambda_{k,i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}. \quad (18)$$

7.1. Résultats

On reprend le précédent test du tube à choc en tenant maintenant compte des conductivités thermiques des matériaux. La conductivité thermique du matériau de gauche a été prise égale à 2×10^5 W/m/K et celle du matériau de droite à 5×10^4 W/m/K. Ces valeurs extrêmes de conductivité sont de l'ordre de grandeur de celles utilisées en physique des plasmas pour modéliser des transferts thermiques complexes. Ici, ces valeurs vont permettre de mettre en évidence les différences entre les résultats exempts d'effets diffusifs de ceux tenant compte de la conductivité. Sur la Fig. 10 on a représenté les champs des variables habituelles. On peut noter la dilatation du fluide de droite sous l'effet de l'échauffement diffusif et l'apparition d'une mise en vitesse légèrement différente.

Sur la Fig. 11 on a effectué un zoom de la température autour de l'interface. La solution qui tient compte des effets diffusifs est plus déportée à droite. Afin de s'assurer du traitement correct des effets diffusifs, nous allons considérer un autre cas test montrant l'établissement du régime diffusif. En effet, l'obtention d'une solution de référence n'est pas aisée pour ce problème où la dilatation du fluide est couplée à l'apparition d'ondes. L'ensemble des couplages ne permet pas l'analyse d'une solution quasi-stationnaire ni auto-semblable. Nous

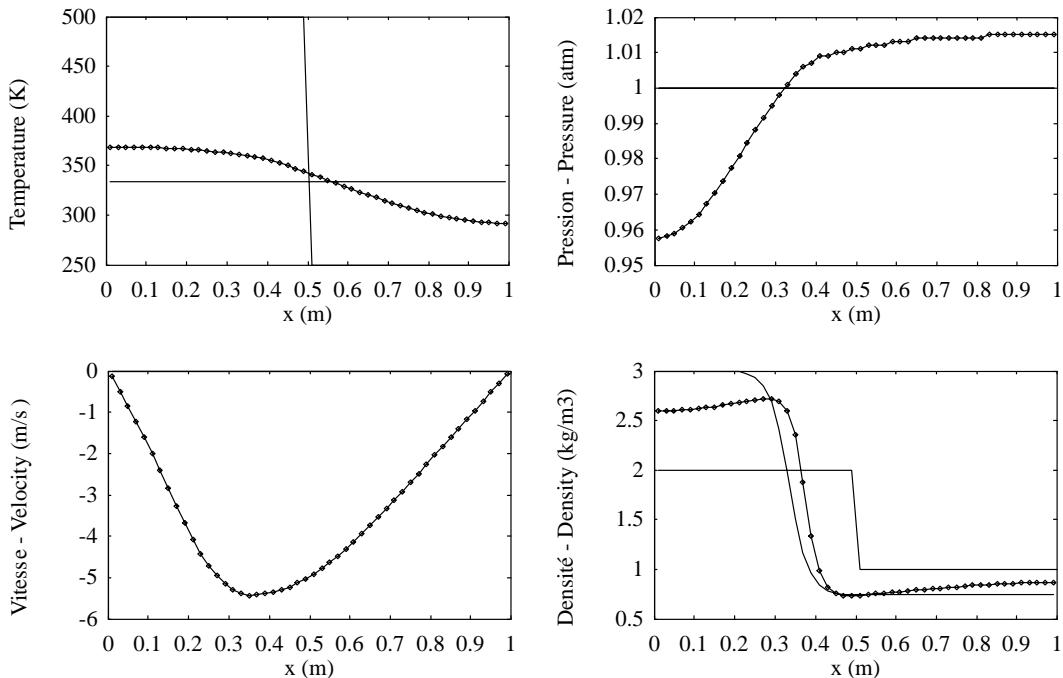


Fig. 12. Problème test pour la diffusion thermique.

pourrons donc seulement vérifier que l'état stationnaire où les gradients de températures sont nuls est bien obtenu. Les données de ce cas test sont rassemblées dans la table suivante:

	Fluide 1	Fluide 2
ρ (kg/m ³)	2	1
P (Pa)	10 ⁵	10 ⁵
u (m/s)	0	0
γ	1.4	1.4
P_∞ (Pa)	0	0
C_v (J/kg/K)	250	1000
ρ_0 (kg/m ³)	2	1
P_0 (Pa)	10 ⁵	10 ⁵
λ (W/m/K)	10 ⁴	5×10 ³

Ces données permettent d'obtenir un état stationnaire assez rapidement comme on peut le constater sur la Fig. 12. La condition initiale est représentée en traits pleins. Elle correspond à un champ uniforme de pression à vitesse nulle. Une discontinuité de température et de densité est présente au centre du domaine. A l'instant $t = 0.14$ s on représente les valeurs des différentes variables (traits et symboles) montrant l'évolution vers le régime d'équilibre qui est représenté à l'instant final $t = 0.28$ s. A cet instant, température, pression et vitesse sont uniformes. Le champ de densité montre le déplacement de l'interface (la solution à l'instant final est représentée en traits pleins): le fluide chaud est maintenant à une température d'équilibre et s'est contracté, alors que le fluide initialement froid s'est dilaté.

On considère finalement un problème multidimensionnel, généralisation de la situation représentée sur la

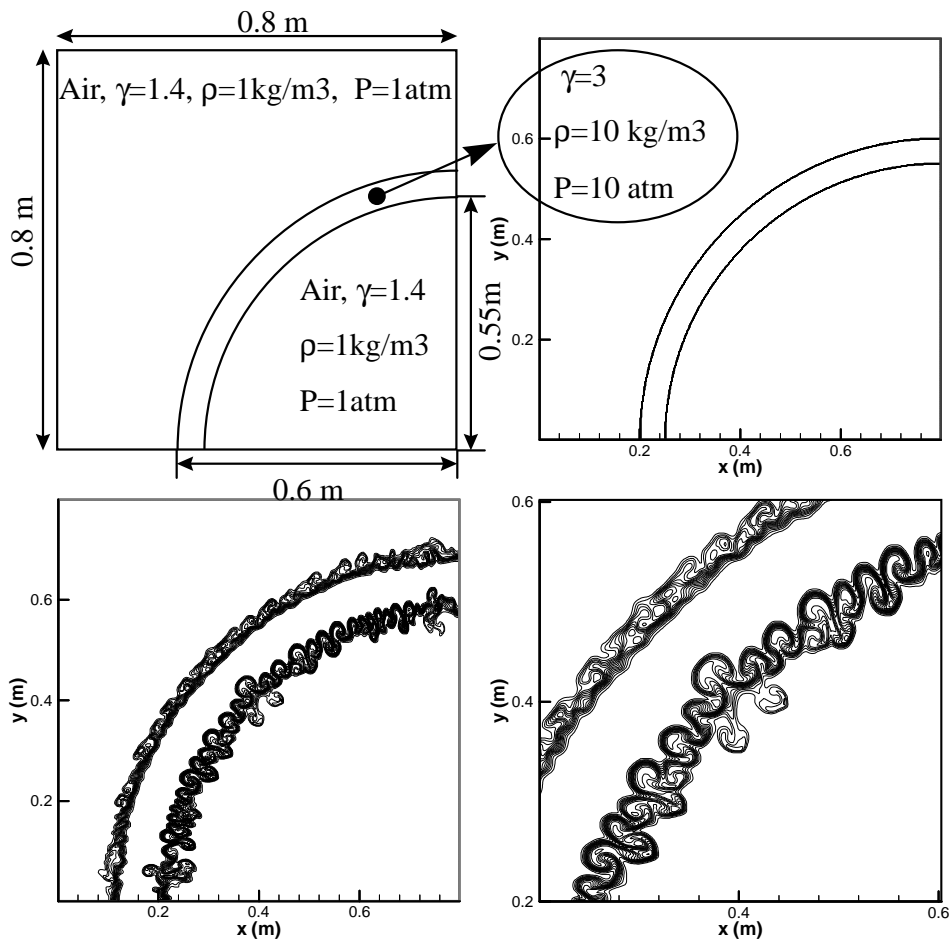


Fig. 13. Schéma de la configuration 2D test et champ de fraction volumique du fluide lourd à l'instant 2.63 ms obtenu par le modèle multiphasique réduit, résolu par le schéma de Godunov modifié. En bas à droite on a effectué un zoom du champ de fraction volumique.

Fig. 1. Pour des raisons de simplicité nous allons faire deux approximations. D'abord, le problème du transfert radiatif responsable de l'échauffement et de l'expansion des matériaux ne sera pas considéré. On suppose en effet que toute l'énergie rayonnée est initialement absorbée sur une durée infiniment courte par le matériau A et que sa pression et sa température augmentent sans variation de volume. Ainsi, à l'instant initial de la simulation, le matériau A est un matériau sous haute pression, entouré d'autres fluides à pression atmosphérique. Les fluides environnant sont peu denses par rapport au fluide A . La configuration est représentée sur la Fig. 13 en haut à gauche. La deuxième approximation consiste à considérer le problème en symétrie cylindrique plutôt que sphérique. En d'autres termes, le calcul sera réalisé en deux dimensions alors qu'il devrait l'être en trois dimensions. Malgré cette approximation on pourra vérifier la reproduction de résultats encourageants par l'outil de simulation.

Sur la Fig. 13 en haut à droite on a représenté les conditions initiales du problème. Le maillage est parfaitement cartésien et est constitué de 500×500 cellules. En raison de la structure cartésienne du maillage, les arcs de cercle vont contenir des imperfections dans leur description géométrique. Ces imperfections sont suffisantes pour amorcer le phénomène d'instabilité hydrodynamique qui est observé sur les graphes suivants (Fig. 13 en bas). La résolution numérique du modèle multiphasique réduit en deux dimensions est réalisée en étendant l'algorithme 1D qui a été présenté précédemment dans un premier temps à l'ordre 2, puis en multi-dimension en prenant les précautions détaillées dans Saurel et Abgrall [19]. Le champ de fraction volumique du fluide lourd est représenté sur ces figures à l'instant 2.63 ms. Le champ de fraction volumique est représentatif de la position de l'interface. On observe clairement les instabilités de type Richtmyer–Meshkov qui se développent intensément, produisant un mélange du fluide lourd et du léger. Ces simulations sont obtenues en utilisant un nombre de Courant de 0.8.

8. Conclusion

Une comparaison de plusieurs méthodes euleriennes pour les écoulements compressibles avec interfaces a été effectuée. Un nouveau modèle a été proposé et s'est avéré à la fois simple, précis et efficace pour le calcul des variables thermodynamiques et cinématiques de l'écoulement. Il repose sur une formulation multiphasique réduite et s'applique en tout point, en particulier dans les zones où un mélange artificiel est produit. Sa résolution est réalisée par un schéma de type Godunov d'ordre 2 avec le même type de solveur de Riemann que pour les équations d'Euler. La méthode a été validée sur différents tests possédant des solutions exactes.

Cette méthode constitue un très bon candidat pour la réalisation d'un outil de simulation pour les instabilités hydrodynamiques entre fluides compressibles.

Toutefois, si l'utilisateur désire se placer dans un contexte plus général où il n'aura pas seulement des problèmes à interfaces à traiter, mais aussi des mélanges à plusieurs vitesses ou des phénomènes de relaxation faisant intervenir des variations des fractions volumiques des fluides, alors d'autres formulations sont préférables. Ces variations de fraction volumique sont rencontrées par exemple lors de la propagation d'un choc dans des alliages métalliques ou dans le cas de réactions chimiques produisant des transferts de masse ou transitions de phase (détonation ou cavitation par exemple).

Dans ces cas, la formulation multiphasique complète, rappelée au Section 4 et décrite dans [18,20] est préférable. Si de plus des phénomènes micro-inertiels (pulsations de bulles dans l'écoulement) ou rotation interne des bulles ou particules sont à envisager, une formulation encore plus générale peut être adoptée [12].

Cette progression en terme de généralité de modèles a bien sûr une contrepartie au moment de la résolution numérique. Afin de résoudre ces modèles de façon précise et générale un nouvel algorithme est proposé dans [4]. Il s'agit d'une méthode innovante, à large domaine d'application, qui traite le plus correctement possible les termes non-conservatifs des équations et donc les ondes de choc dans ces milieux. Ceci est réalisé au prix d'une relative complexité et d'un coût calcul plus important que pour des problèmes classiques.

Remerciements

Cette étude a été réalisée durant les six semaines de l'école d'été CEMRACS 2000 à Marseille sur un sujet proposé par le CEA/CESTA Bordeaux. Nous tenons à remercier MM. Bruno Dubroca et Duffa pour leur confiance et leur soutien. Nous avons aussi bénéficié d'un soutien important dans la mise en œuvre informatique de la part de Thomas Barberon, Sandra Rouy de l'ISITV, Olivier LeMetayer et Eric Daniel de l'JUSTI et Raphaël Loubère du CEA/CESTA. Nous tenons à les assurer de notre reconnaissance.

Références

- [1] R. Abgrall, How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach, *J. Comput. Phys.* 125 (1996) 150–160.
- [2] R. Abgrall, S. Karni, Computations of compressible multifluids, *J. Comput. Phys.* 169 (2) (2001) 594–623.

- [3] R. Abgrall, B. Nkonga, R. Saurel, Efficient numerical approximation of multi-material flow for unstructured meshes, 2001, accepté dans *Comput. Fluids*.
- [4] R. Abgrall, R. Saurel, A numerical multiphase model, 2001, soumis à *J. Comput. Phys.*
- [5] M.R. Baer, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *Int. J. Multiphase Flows* 12 (1986) 861–889.
- [6] D.J. Benson, Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 99 (1992) 235–394.
- [7] P. Clavin, P. Garcia, The influence of the temperature dependence of diffusivities on the dynamics of flame fronts, *J. Mec. Theor. Appl.* 2 (1983) 245–263.
- [8] J.P. Cocchi, Modélisation de l'écoulement autour d'un projectile hypercinétique dans l'eau, Thèse de Doctorat, IUSTI, Université de Provence, 1997.
- [9] D.A. Drew, S.L. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids*, Applied Mathematical Sciences, vol. 135, Springer, New York, 1998.
- [10] J. Coutant, M. Decroisette, D. Jurassezk, B. Meyer, E. Moreau, B. Sitt, La fusion inertielle thermonucléaire par laser, in: *Collection du CEA*, Eyrolles, Paris, 1993.
- [11] B. Dubroca, Positively conservative schemes for gas dynamics, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* 329 (1999) 827–832.
- [12] S. Gavrilyuk, R. Saurel, A compressible multiphase flow model with micro-inertia, 2001, à paraître *J. Comput. Phys.*
- [13] S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov, *Resolution numerique des Problemes multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Mir, Moscou, 1979.
- [14] A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer, On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* 25 (1) (1983) 33–61.
- [15] A. Kapila, S. Son, J. Bdzil, R. Menikoff, D. Stewart, Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone, *Phys. Fluids* 9 (12) (1997) 3885–3897.
- [16] S. Karni, R. Abgrall, Ghost fluid for the poor: a single fluid algorithm for multifluid, Oberwolfach (2000).
- [17] L. Masse, L. Hallo, C. Tallot, Direct drive ablation front stability: numerical predictions against flame front model, in: *Inertial Fusion Sciences and Applications* 99, 2000.
- [18] R. Saurel, R. Abgrall, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, *J. Comput. Phys.* 150 (1999) 425–467.
- [19] R. Saurel, R. Abgrall, A simple method for compressible multifluid flows, *SIAM J. Sci. Comput.* 21 (3) (1999) 1115–1145.
- [20] R. Saurel, O. LeMetayer, A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation, *J. Fluid Mech.* 431 (2001) 239–271.
- [21] E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1997.
- [22] K.M. Shyue, An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems, *J. Comput. Phys.* 142 (1998) 208.